CONCOURS BLANC 2 ÉPREUVE 1

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{\ln(1-x)}{\ln x} & \text{si } x\in]0,1[\\ 0 & \text{si } x=0\end{array}\right. .$$

Partie A : étude de la fonction f.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1[$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que l'on a, pour tout $x\in]0,1[$,
$$f'(x)=\frac{1}{x(1-x)\left(\ln(x)\right)^2}\left(-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)\right).$$
4. **a.** Justifier que pour tout $t\in]0,1[$, $t\ln t<0$.
   b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.
5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant figurer la tangente en 0 et les éventuelles branches infinies.

Partie B : Résolution de l'équation $f(x)=x$.

On introduit la fonction g définie sur $]0,1[$ par
$$g(x)=\ln(1-x)-x\ln(x).$$

7. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et calculer, pour tout $x\in]0,1[$, $g'(x)$ et $g''(x)$.
8. Dresser le tableau de variations de g'. Justifier qu'il existe un unique nombre réel $\beta\in]0,1[$ tel que $g'(\beta)=0$. En déduire le tableau de signe de $g'(x)$ sur $]0,1[$.
9. Déduire des questions précédentes les variations de g. Trouver le signe de $g(\beta)$. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $g(\alpha)=0$ et qu'en plus $0<\beta<\alpha<1$.
10. Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x)=x$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0,1[$. Expliciter le tableau de signe de $f(x)-x$ sur cet intervalle.

Date: 3 Mars 2025 08h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

Partie C : étude d'une suite récurrente.

On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} w_0 \in \left]0,1\right[, \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$$

11. Que se passe-t-il si on prend $w_0 = 0$ ou $w_0 = \alpha$.

12. Dans cette question, on suppose que $w_0 \in \left]\alpha, 1\right[$ et on cherche à montrer que $(w_n)_n$ **n'est pas** bien définie.

- **a.** L'intervalle $\left]\alpha, 1\right[$ est-il stable par f ?
  On raisonne dorénavant par l'absurde et on suppose que w_n est défini pour tout n.
- **b.** Montrer que la suite $(w_n)_n$ est croissante.
- **c.** Montrer alors que $(w_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
- **d.** Conclure.
- **e.** Écrire un programme Python qui prend en paramètre un nombre w0 donné par l'utilisateur, puis calcule et affiche le premier rang n tel que w_n est bien défini mais w_{n+1} n'existe pas

13. Dans cette question, on suppose que $w_0 \in \left]0, \alpha\right[$.

- **a.** Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- **b.** Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie D : étude d'une suite implicite.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $\left]0, 1\right[$.

16. Déterminer u_1 et u_2.

17. **a.** Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n) :
  a=0
  b=1
  while ........
    c=(a+b)/2
    if c**n + c - 1 > 0 :
      .........
    else :
      .........
  return ..........
```

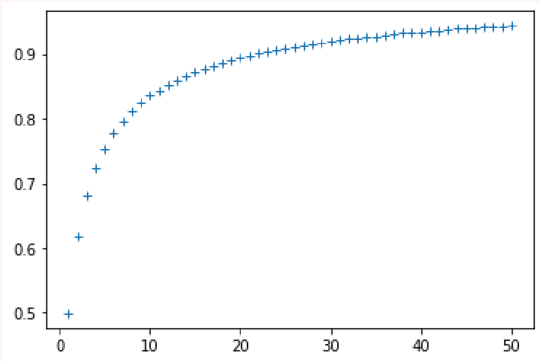
b. On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet d'afficher la figure ci-dessous. Expliquer à quoi elles correspondent. Quelles conjectures peut-on faire sur le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ concernant sa monotonie et son éventuelle limite.

```
import matplolib.pyplot as plt

X = list(range(1,51))
L = []
for k in range(1,51) :
  L.append(valeur_approchee(k))

plt.plot(X,L,'+')
plt.show
```

Affichage Python



18. Déterminer, pour $x \in]0,1[$, le signe de $h_{n+1}(x) - h_n(x)$. En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

19. **a.** Justifier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $\ell \in [0,1]$.

b. On suppose que $\ell \in [0,1[$. Vérifier que $n\ln(u_n) \to -\infty$ et en déduire la limite de u_n^n. Aboutir à une contradiction puis conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = n$. Retrouver alors les résultats précédents concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

On définit, pour tous réels a et b la matrice $M(a,b)$ par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note $E = \left\{ M(a,b) \ | \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

1. **a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Déterminer une base de E et sa dimension.

b. Le produit de deux matrices quelconque de E appartient-il encore à E ?

2. Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.

Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

3. Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.

Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.

a. Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.

b. En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4. Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.

Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.

a. On considère le programme Python suivant :

```
1  import numpy as np
2  import numpy.linalg as alg
3
4  b=3
5
6  B = np.array([[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[b,b,b,b]])
7
8  r0 = alg.matrix_rank(B)
9  rb = alg.matrix_rank(B-b*np.eye(4))
10
11 print("r0 = ",r0)
12 print("rb = ",rb)
```

L'exécution de ce programme retourne

```
r0 = 1
rb = 3
```

et on admet que ce retour ne change pas lorsqu'on modifie la valeur de `b` à la ligne 4 du programme. Que peut-on conjecturer sur les valeurs propres de B et la dimension des espaces propres associés.

b. Vérifier les conjectures faites à la question précédente.

c. La matrice B est-elle diagonalisable ?

5. Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M(a,b)$. On pose

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.

b. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

c. Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.

d. Soit λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Montrer que X est un vecteur propre de N associé à la valeur propre λ *si et seulement si* ($\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ et $z = t = 0$).

e. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, 1)$
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1, 1)$ est diagonalisable.

f. On suppose dans cette question **uniquement** que $(a, b) = (1, -1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1, -1)$ est-elle diagonalisable ?

g. Montrer l'équivalence

$$M(a, b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow a^2 + 10ab + b^2 > 0.$$

Exercice 3

Partie I : propriété d'une loi de probabilité. On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et de c.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

b. En déduire que la loi de $\frac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$ est la loi de X.

Partie II : réciproque de la propriété précédente.

On considère la variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$ strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.

Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\frac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$ est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. a. Établir l'égalité, pour tout $x \geqslant 1$, pour tout $t > 1$,

$$G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}.$$

b. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que, pour tout $x \geqslant 1$, pour tout $t > 1$,

$$G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}.$$

c. Montrer enfin la relation, pour tout $t > 1$,

$$G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1.$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a. Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si et seulement si z est constante sur $]1, +\infty[$.

b. En notant K la constante évoquée à la question **6.a**, donner toutes les solutions de (E_1).

c. Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$ solution de l'équation différentielle (E_2).

d. Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \rightarrow h - u$ est solution de (E_1).

e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par, pour tout $t > 1$,

$$h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}.$$

7. **a.** Montrer finalement que l'on a, pour tout $t > 1$,

$$G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}.$$

b. Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie III : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

b. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.